Diplomhauptprüfung / Masterprüfung

"Automatisierung ereignisdiskreter und hybrider Systeme"

17. September 2009

Aufgabenblätter

Die Lösungen sowie der vollständige und nachvollziehbare Lösungsweg sind in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Nur diese werden bewertet. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibgerät.

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem ersten Lösungsblatt ein, und geben Sie am Ende der Prüfung alle zur Verfügung gestellten Lösungsblätter ab.

1. Aufgabe

a) ● Welche Situationen treffen für das Petri-Netz von Abbildung 1.1 zu, wenn alle Kantengewichte den Wert eins besitzen?

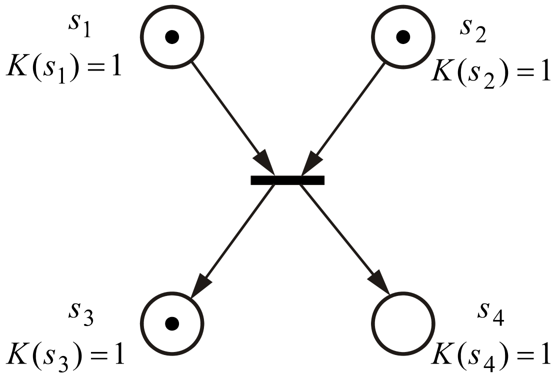


Abbildung 1.1

1. Konflikt
2. Verklemmung
3. Kontakt
4. nicht 1.- 3.

● Welche Eigenschaften eines Petri-Netzes schließen sich gegenseitig aus?

1. lebendig und reversibel

2. lebendig und tote Markierung

3. reversibel und nicht lebendig

4. lebendig und partielle Verklemmung

● Nennen Sie die drei Klassen, die bei einer Klassifizierung technischer Prozesse nach den darin vorkommenden dominierenden Vorgängen entstehen.

● Wie ist ein „Reines Petri-Netz“ definiert?

b) Untersuchen Sie die in Abbildung 1.2 gegebenen drei Petri-Netze.

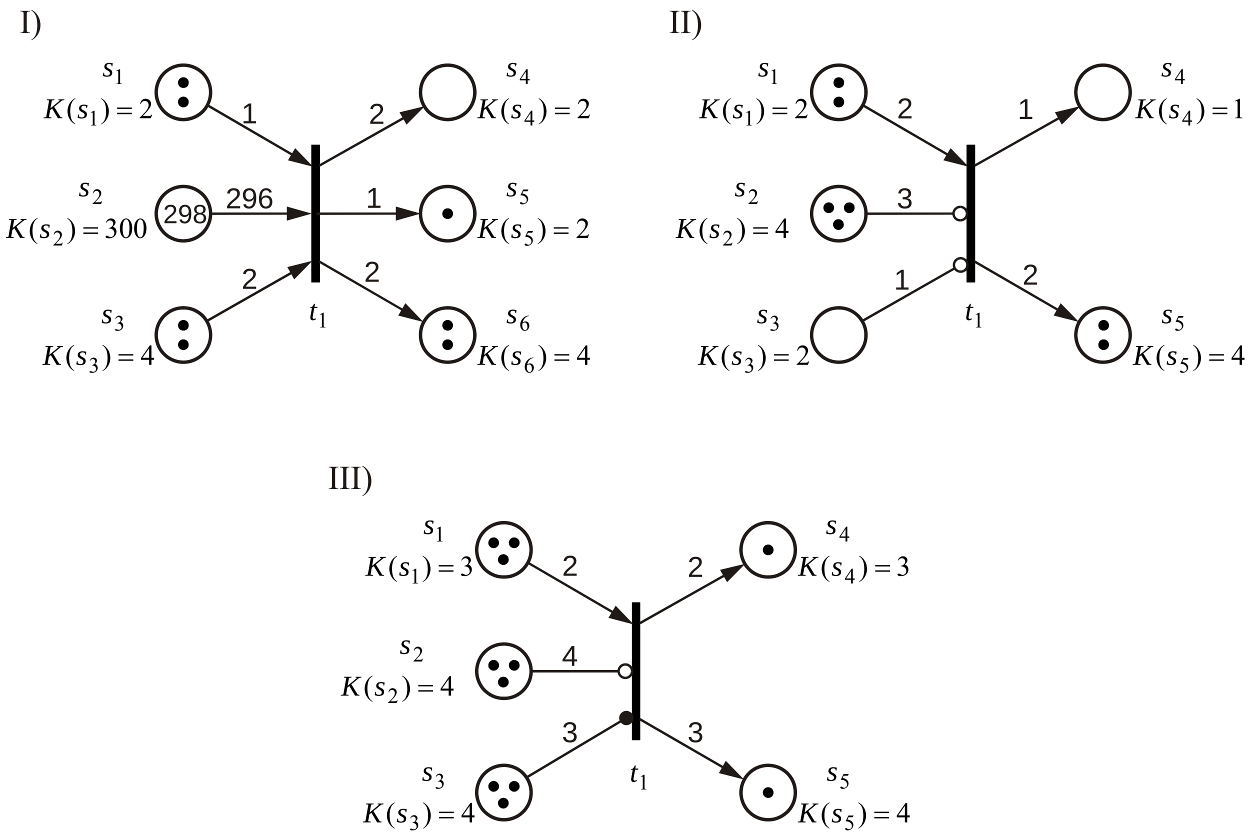


Abbildung 1.2

Bestimmen Sie jeweils für die Transitionen in den einzelnen Petri-Netzen, ob sie unter den gegebenen Markierungen schaltfähig sind. Wenn ja, geben Sie den Markierungsvektor nach dem Schalten der Transition an. Wenn nein, so begründen Sie dies.

c) In Abbildung 1.3 ist eine Siloanlage schematisch dargestellt.

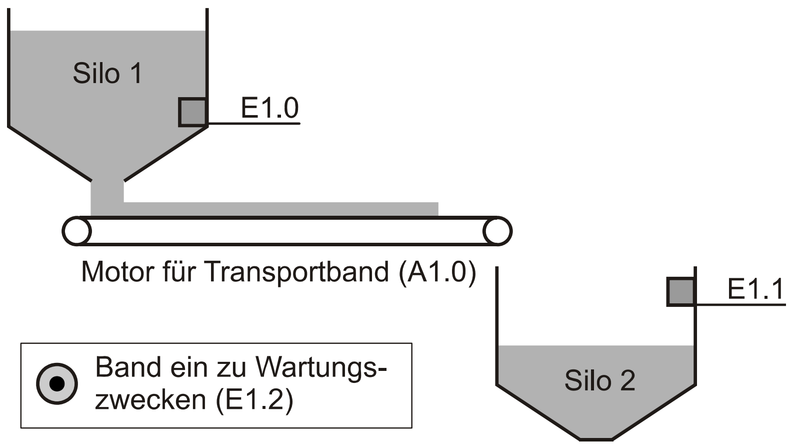


Abbildung 1.3

Sie stehen vor der Aufgabe, eine Ansteuerung für den Motor des Transportbandes zu entwerfen. Der Motor (A1.0) soll das Band dann antreiben, wenn die Füllhöhe im Silo 1 eine bestimmte untere Grenze überschritten und die Füllhöhe im Silo 2 eine bestimmte obere Grenze nicht überschritten hat. Die untere Grenze von Silo 1 wird durch den Sensor E1.0 und die obere Grenze von Silo 2 durch den Sensor E1.1 überwacht. Die Sensoren liefern jeweils den Wert TRUE, wenn die Füllhöhe die Grenze überschritten hat, ansonsten FALSE. Des Weiteren soll der Motor zu Wartungszwecken über einen Schalter (E1.2) eingeschaltet werden können, unabhängig von den jeweiligen Füllhöhen der beiden Silos. Es handelt sich bei allen Signalen um Binärsignale.

Stellen Sie den beschriebenen Zusammenhang in den nach IEC 1131-3 normierten Sprachen KOP, FUP, ST dar.

d) Gegeben ist das in Abbildung 1.4 dargestellte Petri-Netz.

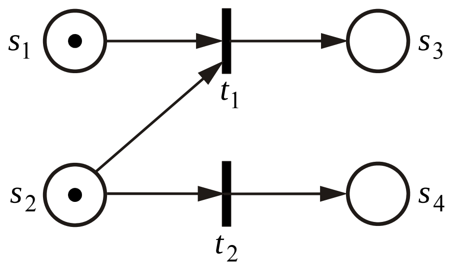


Abbildung 1.4

Sämtliche Stellenkapazitäten und Kantengewichte besitzen den Wert eins.

- Handelt es sich bei dem dargestellten Petri-Netz um eine Zustandsmaschine?
  Begründen Sie Ihre Antwort!

- Handelt es sich bei dem dargestellten Petri-Netz um einen Synchronisationsgraphen?
  Begründen Sie Ihre Antwort!

- Handelt es sich bei dem dargestellten Petri-Netz um ein Free-Choice-Netz?
  Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Aufgabe

a) Gegeben ist eine Netzmatrix $\underline{N}$ mit

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Zeichnen Sie das dazugehörige Petri-Netz mit der Anfangsmarkierung $\underline{m}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ und beschriften Sie die Stellen und Transitionen mit ihren Kantengewichten entsprechend.
- Ist die Schaltbedingung für t_3 erfüllt, wenn für den Stellenkapazitätsvektor $\underline{k} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ gilt? Begründen Sie dies mathematisch mittels der Zustandsgleichung.

b) Gegeben ist ein Petri-Netz nach Abbildung 2.1.

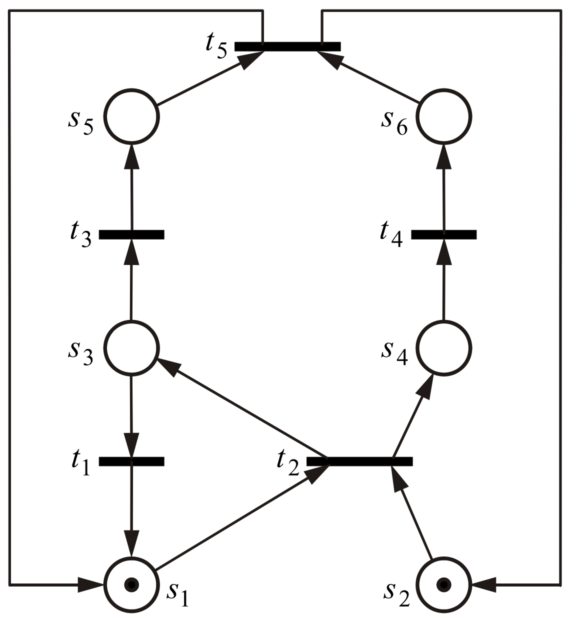


Abbildung 2.1

Sämtliche Stellenkapazitäten und Kantengewichte besitzen den Wert eins.

- Untersuchen Sie mit Hilfe der algebraischen Analyse, ob das gegebene Petri-Netz reversibel, lebendig und beschränkt sein könnte. Geben Sie für das auftretende Gleichungssystem zunächst alle Lösungen an!

- Untersuchen Sie mit Hilfe der algebraischen Analyse, ob das gegebene Petri-Netz beschränkt ist. Geben Sie für das auftretende Gleichungssystem zunächst alle Lösungen an!

- Zeichnen Sie den Erreichbarkeitsgraphen für das gegebene Petri-Netz mit der in Abbildung 2.1 dargestellten Anfangsmarkierung, wobei das gleichzeitige Schalten von Transitionen nicht berücksichtigt werden soll.

- Ist das gegebene Petri-Netz lebendig?
  - Erläutern Sie dies anhand der S- und T- Invarianten.
  - Erläutern Sie, wie dies anhand des Erreichbarkeitsgraphen zu erkennen ist.

c) Modellieren Sie eine Straßenampel als „Reines Petri-Netz“ mit lediglich drei Stellen (jeweils eine für ROT, GELB, und GRÜN), wobei der Ablauf in der Abfolge GRÜN, GELB, ROT, ROT-GELB, (GRÜN ...) stattfinden soll. Fügen Sie die Transitionen so ein, dass der oben beschriebene Ablauf gewährleistet ist. Beschriften Sie die Stellen sowie die Transitionen und geben Sie die Stellenkapazitäten sowie die Kantengewichte explizit an. Verwenden Sie keine Test- und Inhibitor-Kanten.

d) Verknüpfen Sie die in den Lösungsblättern dargestellten Petri-Netze einer Fußgängerampel mit den Zuständen ROT (S5) und GRÜN (S6) mit der KFZ-Ampel mit den Zuständen ROT (S1), ROT-GELB (S2), GRÜN (S3) und GELB (S4), so dass sich die Fußgängerampel nur währen der Rotphase der KFZ-Ampel im Zustand GRÜN befindet.

- Fügen Sie die dazu notwendigen Petri-Netzelemente ein, damit ein „Reines Petri-Netz“ entsteht. Verwenden Sie keine Test- und Inhibitor-Kanten.
- – Fügen Sie weiterhin eine Kantenzeitbewertung so ein, dass die Umschaltung der KFZ-Ampel von ROT auf ROT-GELB erst um $t = t_t$ verzögert geschehen kann.

  – Wie lange befindet sich die Fußgängerampel auf GRÜN?
- Wie lautet eine zulässige Markierung?

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Petri-Netz nach Abbildung 3.1, wobei alle Kantengewichte und Stellenkapazitäten den Wert eins besitzen.

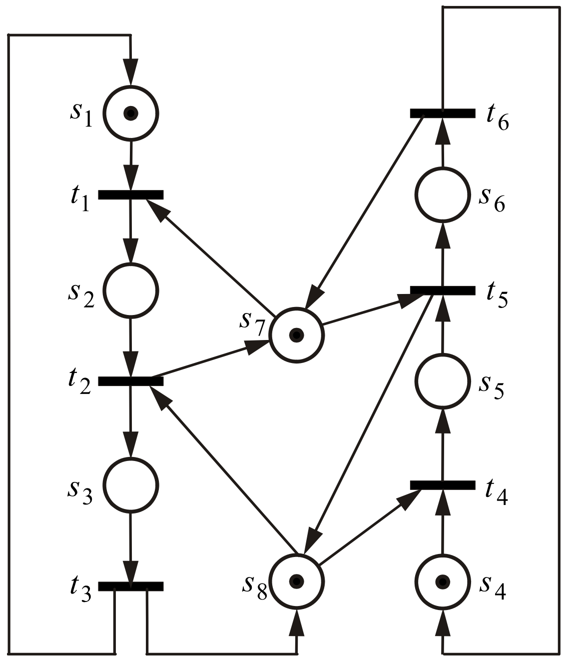


Abbildung 3.1

a) • Stellen Sie für das dargestellte Petri-Netz den Erreichbarkeitsgraphen auf.

• Ist das Petri-Netz konfliktfrei? Erläutern Sie, wie dies anhand des Erreichbarkeitsgraphen zu erkennen ist.

b) • Kennzeichnen Sie die starken Komponenten des Erreichbarkeitsgraphen durch Umranden.

• Beschriften Sie diese starken Komponenten mit „Quelle“ oder „Senke“, entsprechend ihrer Zugehörigkeit.

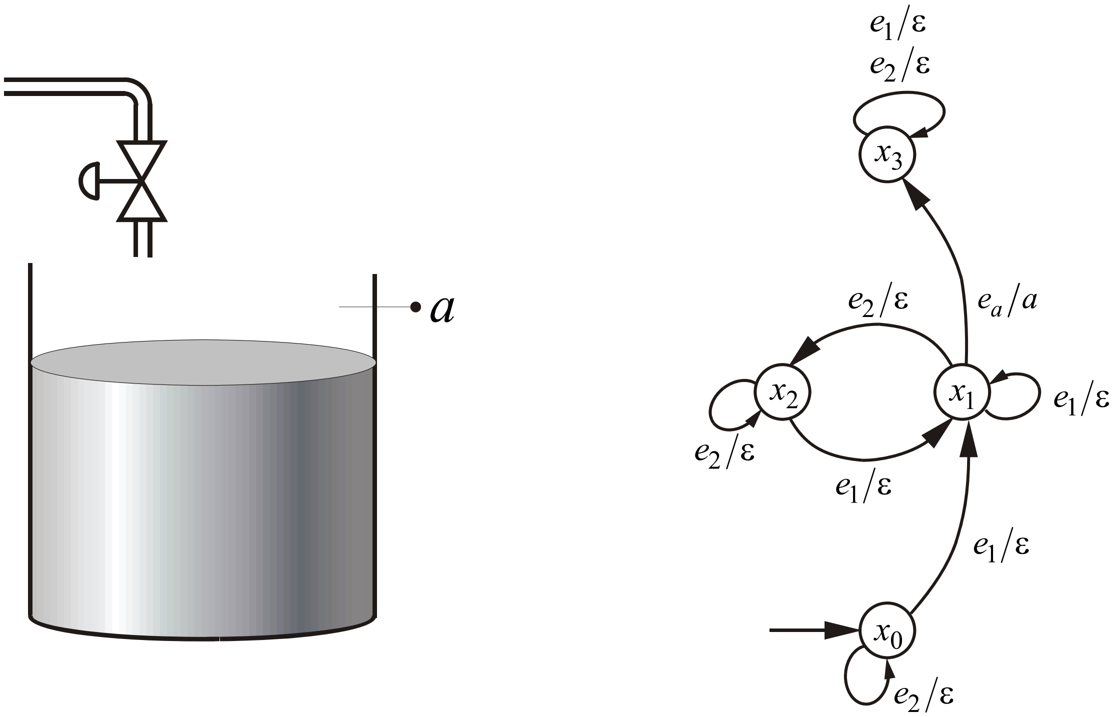
• Ist das dargestellte Petri-Netz reversibel? Begründen Sie ihre Antwort!

c) In dem in Abbildung 3.1 dargestellten Petri-Netz kann eine totale Verklemmung auftreten. Geben Sie für diesen Zustand den Markierungsvektor an.

d) Es soll nun eine Verriegelungssteuerung mit Hilfe der S-Invarianten entworfen werden, so dass die totale Verklemmung nicht mehr auftreten kann. Führen Sie den Entwurf mittels S-Invarianten durch und zeichnen Sie die Erweiterung in das in den Lösungsblättern vorhandene Petri-Netz mit der entsprechenden erweiterten Anfangsmarkierung.

4. Aufgabe

a) Gegeben ist der in Abbildung 4.1 dargestellte Tank, dessen Befüllung mit Hilfe eines Automaten modelliert wurde.



x_0 : Behälter leer	e_1 : Ventil wird geöffnet
x_1 : Füllstand mittel + steigend	e_2 : Ventil wird geschlossen
x_2 : Füllstand mittel + konstant	e_a : a wird 1
x_3 : Behälter voll	

Abbildung 4.1

Modellieren Sie die Tankbefüllung als NCE-System. Verwenden Sie dazu die in den Lösungsblättern vorbereiteten Module für das Ventil und den Tank.

b) Gegeben ist das in Abbildung 4.2 gezeigte Petri-Netz.

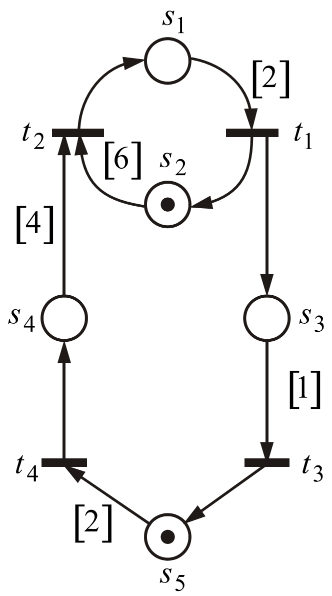


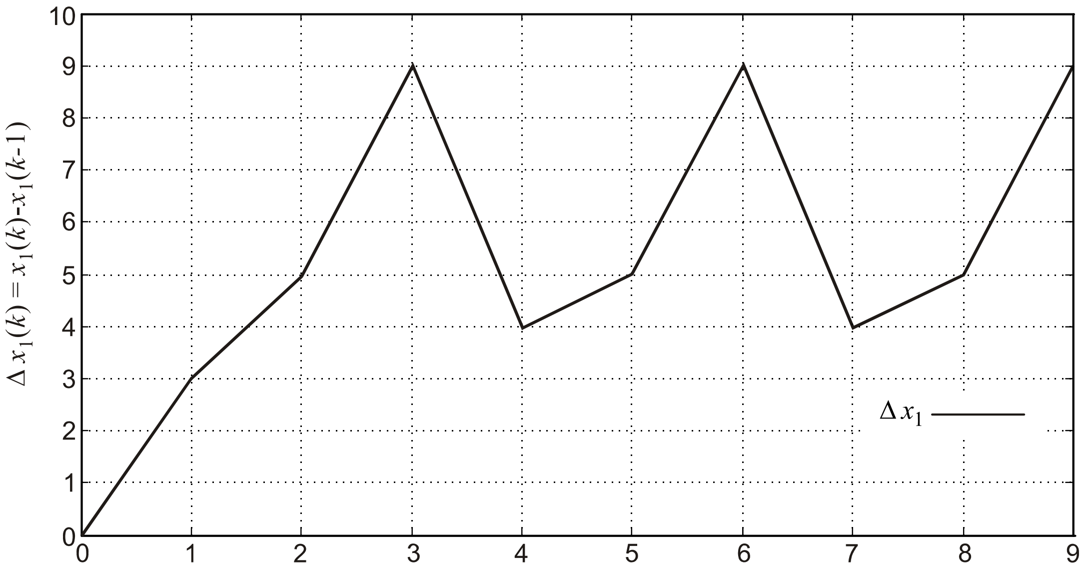
Abbildung 4.2

- Geben Sie für das Petri-Netz die implizite Gleichung in der Schreibweise der Max-Plus-Algebra an.
- Geben Sie die rekursive Gleichung an. Berechnen Sie hierfür die notwendigen Matrizen.
- Welche Bedeutung haben die Elemente in der Matrix $\underline{A}_0^2$?
- Geben Sie den Eigenwert λ an.

c)
- Geben Sie das „Neutrale Element“ der Max-Plus-Addition an.
- Geben Sie das „Neutrale Element“ der Max-Plus-Multiplikation an.

d) In Abbildung 4.3 sind zwei unterschiedliche Einschwingvorgänge dargestellt.

I)



II)

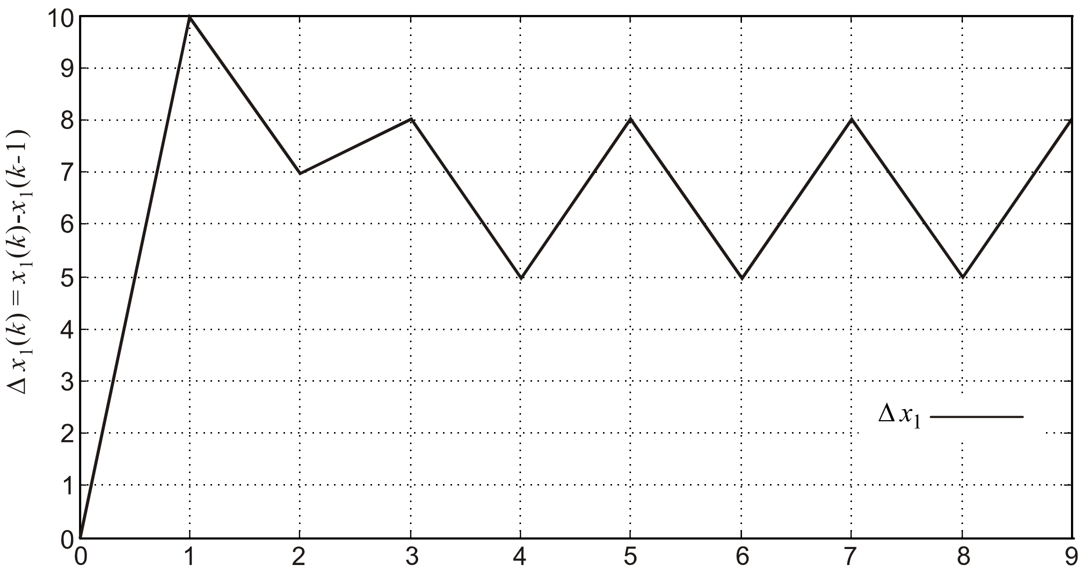


Abbildung 4.3

- Geben Sie für beide Fälle den Eigenwert λ und die Zyklizität γ an.

e) Gegeben ist der Eigenvektor $\underline{v} = \begin{bmatrix}-1 & -3 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3\end{bmatrix}^T$.
Ihnen ist bekannt, dass die Transition t_6 gerade schaltet.

- Nach wie vielen Zeiteinheiten schaltet dann die Transition t_4 ?

- Die Transition t_5 sollte frühestens nach 3 Zeiteinheiten schalten. Ist diese Bedingung erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

IRS Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
kommissarischer Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. Gert F. Trommer

Diplomhauptprüfung / Masterprüfung

"Automatisierung ereignisdiskreter und hybrider Systeme"

17. September 2009

Lösungsblätter

Name: Barce **Vorname:** Lona

Matrikelnummer: 4:0

Bitte tragen Sie gleich zu Beginn der Prüfung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf diesem Deckblatt ein.

Die Lösungen sowie der vollständige und nachvollziehbare Lösungsweg sind in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Nur diese werden bewertet. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug.

Bei Platzproblemen können die Rückseiten der Lösungsblätter benutzt oder zusätzliche Lösungsblätter angefordert werden. Eigenes Konzeptpapier ist nicht zugelassen und wird als unzulässiges Hilfsmittel bewertet.

Geben Sie am Ende der Prüfung alle zur Verfügung gestellten Lösungsblätter ab.

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Aufgabe

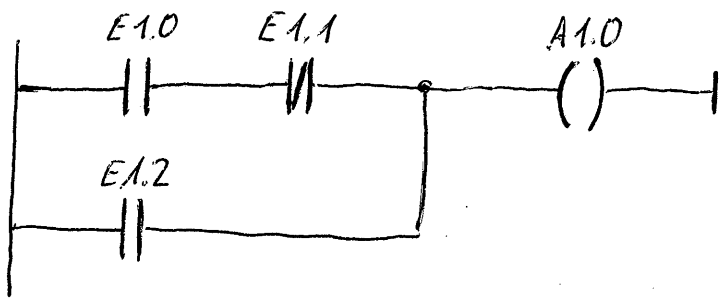
1a)
- 2. Verklemmung
  3. Kontakt
- 2. lebendig und tote Markierung
  4. lebendig und partielle Verklemmung
- Fließprozesse
  Folgeprozesse
  Stück(gut)-Prozesse
- $\forall (s_i, t_j) \in F : (t_j, s_i) \notin F$, d.h. ein „Reines Petri-Netz" ist schleifenfrei'

1b) I) $\underline{m} = [1\ 2\ 0\ 2\ 2\ 4]^T$

II) nicht schaltfähig, aufgrund der Inhibitorkante
$M(s_2) \nless W(s_2, t_1)$

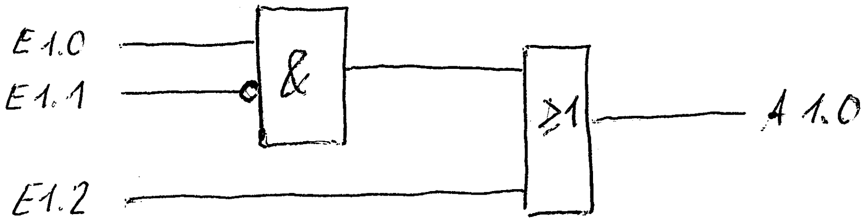
III) $\underline{m} = [1\ 3\ 3\ 3\ 4]^T$

1c) Kontaktplan (KOP)



Fortsetzung 1c)

Funktionsplan (FUP)



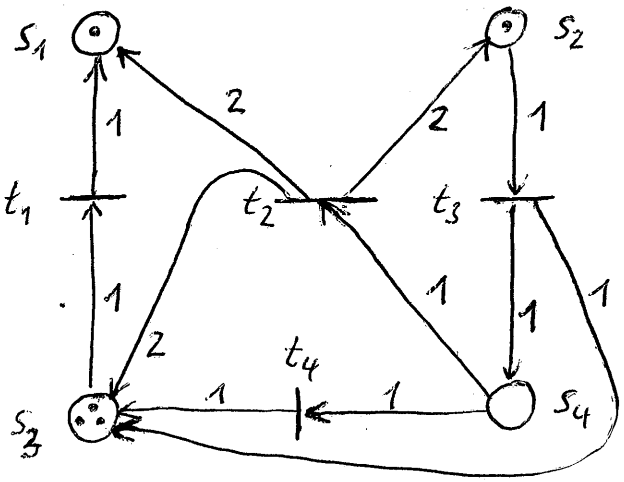
Strukturiertes Text (ST)

```
IF (E1.0 = TRUE AND E1.1 = FALSE) OR E1.2 = TRUE THEN
    A1.0 := TRUE;
ELSE
    A1.1 := FALSE;
END_IF
```

1d)
- Nein, da $|{\bullet}t_1| = 2 \neq 1$
- Nein, da $|s_2{\bullet}| = 2 \neq 1$
- Nein, da $|s_2{\bullet}| = 2 \neq 1$ und ${\bullet}(s_2{\bullet}) = \{s_1, s_2\} \neq s_2$

2. Aufgabe

2a) •



• Nein, denn

$$\underline{m}(1) = \underline{m}(0) + \underline{N} \cdot \underline{v}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2b)

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fortsetzung 2b)

- T-Invariante $\underline{N} \cdot \underline{i}_T = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$i_{T_5} = \lambda \in \mathbb{Z} \wedge i_{T_4} = \lambda \wedge i_{T_3} = \lambda \wedge i_{T_2} = \lambda \wedge i_{T_1} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{i}_T = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{Z} \qquad \text{gewählt } \lambda = 1 : \underline{i}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\exists\, \underline{i}_T \in \mathbb{N}^5 : \underline{N} \cdot \underline{i}_T = \underline{0}$ $\Rightarrow$ Petri-Netz <u>kann</u> reversibel sein.

$\nexists\, \underline{i}_T \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^5 : \underline{N} \cdot \underline{i}_T = \underline{0}$ $\Rightarrow$ Petri-Netz <u>kann nicht</u> lebendig <u>und</u> beschränkt sein.

- S-Invariante $\underline{N}^T \cdot \underline{i}_S = \underline{0}$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Fortsetzung 2b)

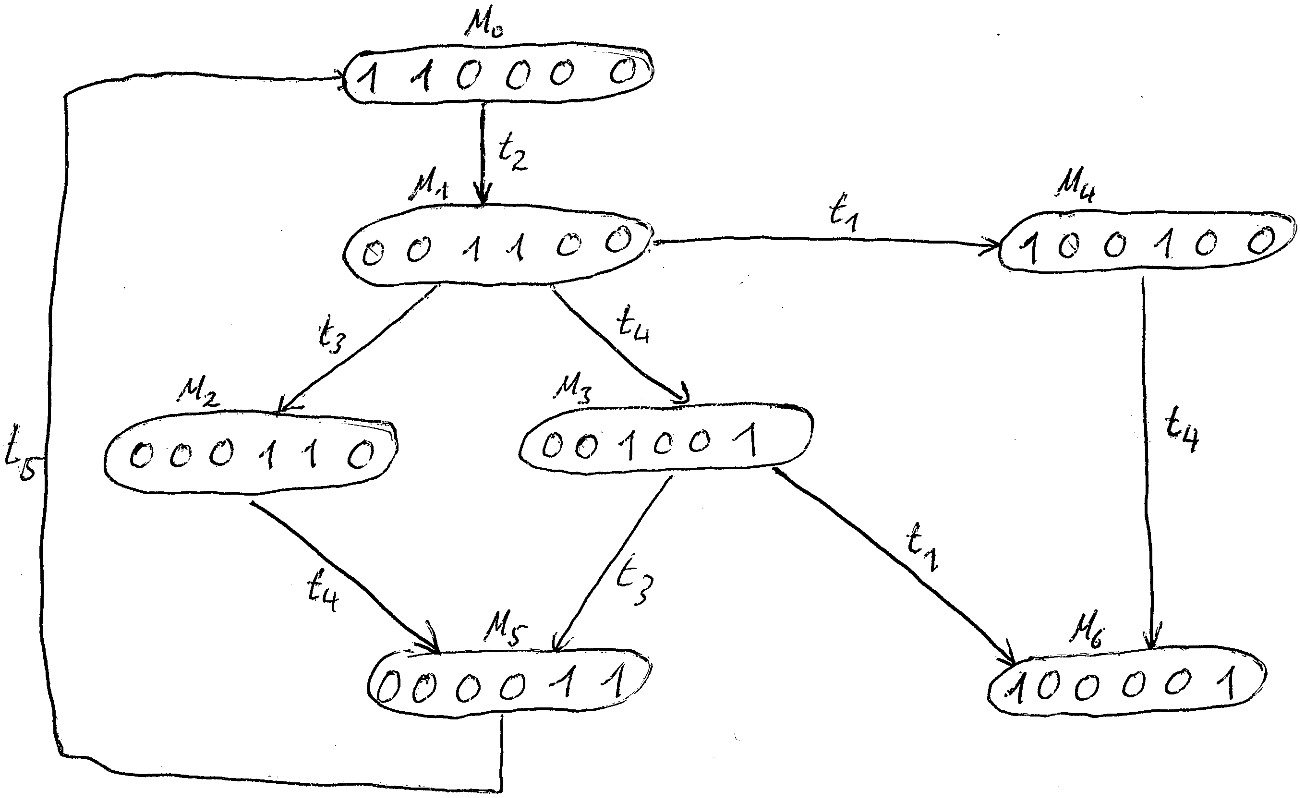
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$i_{s_6} = \mu \in \mathbb{Z} \wedge i_{s_5} = \lambda \in \mathbb{Z} \wedge i_{s_4} = \mu \wedge i_{s_3} = \lambda \wedge i_{s_2} = \mu \wedge i_{s_1} = \lambda$

$$\underline{i}_s = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \quad \text{gewählt: } \lambda = \mu = 1 \Rightarrow \underline{i}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

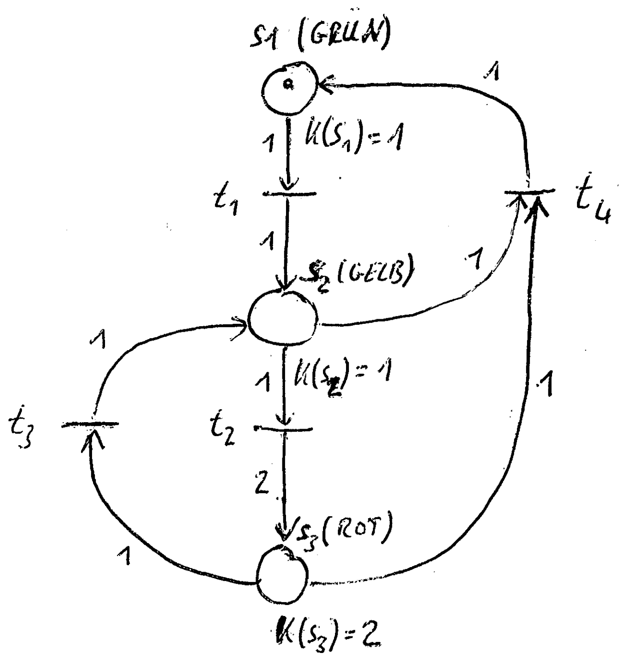
$\exists\, \underline{i}_s \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^6 : \underline{N}^T \cdot \underline{i}_s = \underline{0} \Rightarrow$ Petri-Netz ist beschränkt.

•

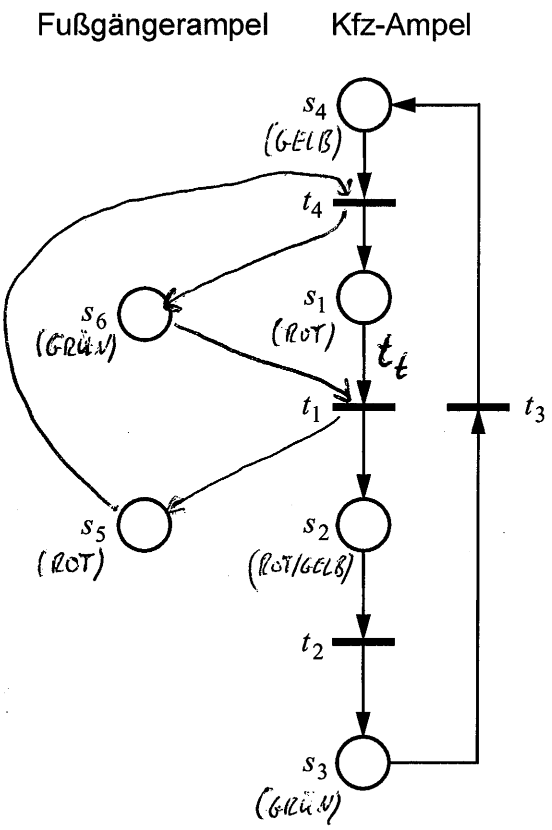


•
- Entsprechend der T-Invariante kann das Petri-Netz <u>nicht</u> lebendig <u>und</u> beschränkt sein. Entsprechend der S-Invariante ist das Petri-Netz aber beschränkt. Hieraus folgt das Petri-Netz ist <u>nicht lebendig</u>.
- Die Markierung $M_6 = (100001)$ besitzt keine auslaufenden Kanten
  $\Rightarrow$ <u>nicht lebendig</u>

2c)



2d) •

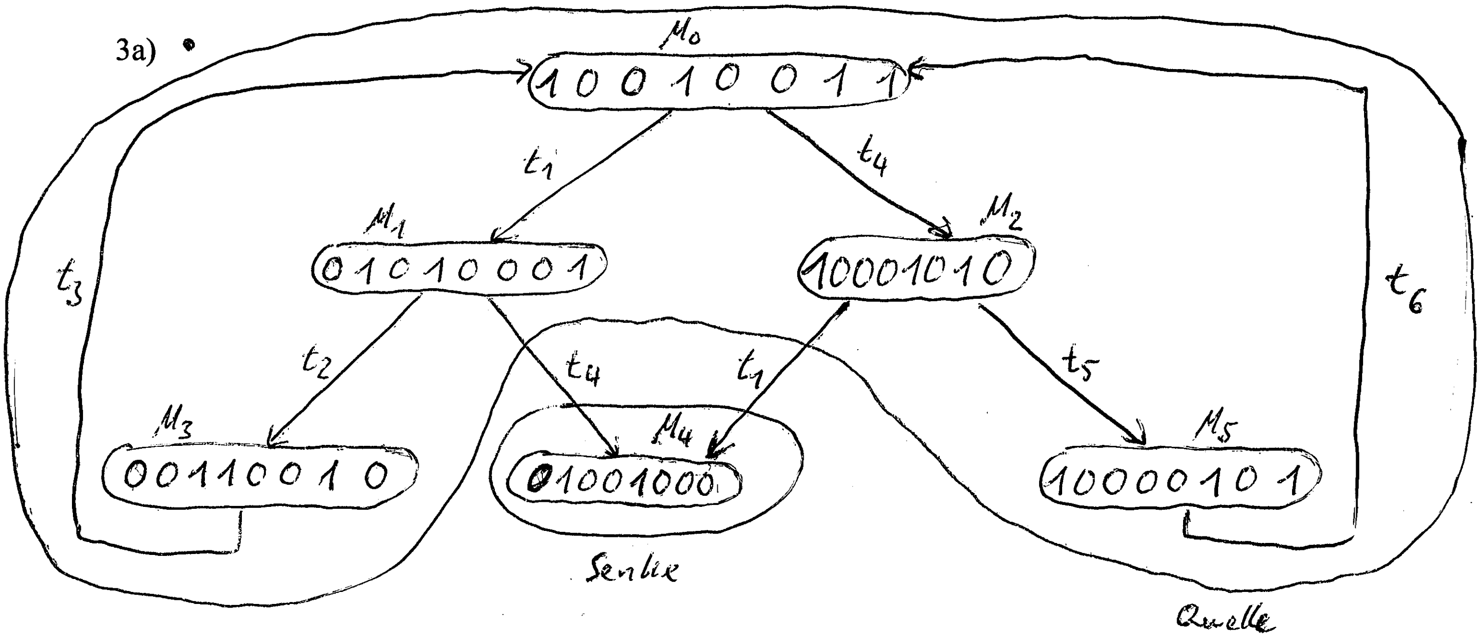


• – Grünphase : t_t

• $\underline{m}^T = [1 0 0 0 0 1]^T$ oder $\underline{m}^T = [0 b b b 1 0]$

3. Aufgabe

3a) •



• Nein, denn bei der Markierung M_1 sowie M_2 liegt ein Konflikt vor.

Bei der Markierung M_1 kann entweder t_2 oder t_4 schalten. Schaltet t_4 gelangt man zu M_4, diese Markierung besitzt keine auslaufende Kante (mit der Bezeichnung t_2)

Bei der Markierung M_2 kann entweder t_1 oder t_5 schalten. Schaltet t_1 gelangt man zu M_4, diese Markierung besitzt keine auslaufende Kante (mit der Bezeichnung t_5)

3b) • Nein, das Petri-Netz ist nicht reversibel, da der Erreichbarkeitsgraph nicht stark zusammenhängend ist.

3c) $\underline{m}^T = [0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0]^T$

3d) $m_2(k) + m_5(k) \leq 1$

$$\underline{\ell}^T \underline{m}(k) \leq 1 \qquad \text{mit} \quad \underline{\ell}^T = [0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0]$$

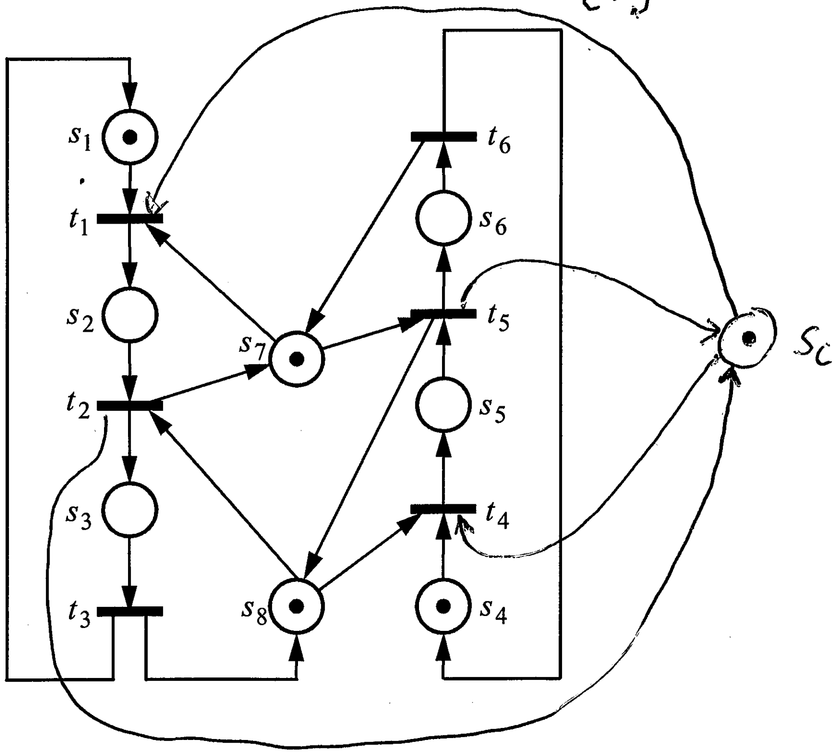
$$\underline{\ell}^T \underline{m}(k) + m_c(k) = 1 \qquad \text{mit} \quad m_c(k) \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\ell}^T & 1 \end{bmatrix}}_{S\text{-Invariante}} \begin{bmatrix} \underline{m}(k) \\ m_c(k) \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{n}_c^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\ell} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\ell}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{n}_c^T \end{bmatrix} = \underline{0}^T \quad \Rightarrow \quad \underline{n}_c^T = -\underline{\ell}^T \cdot \underline{N}$$

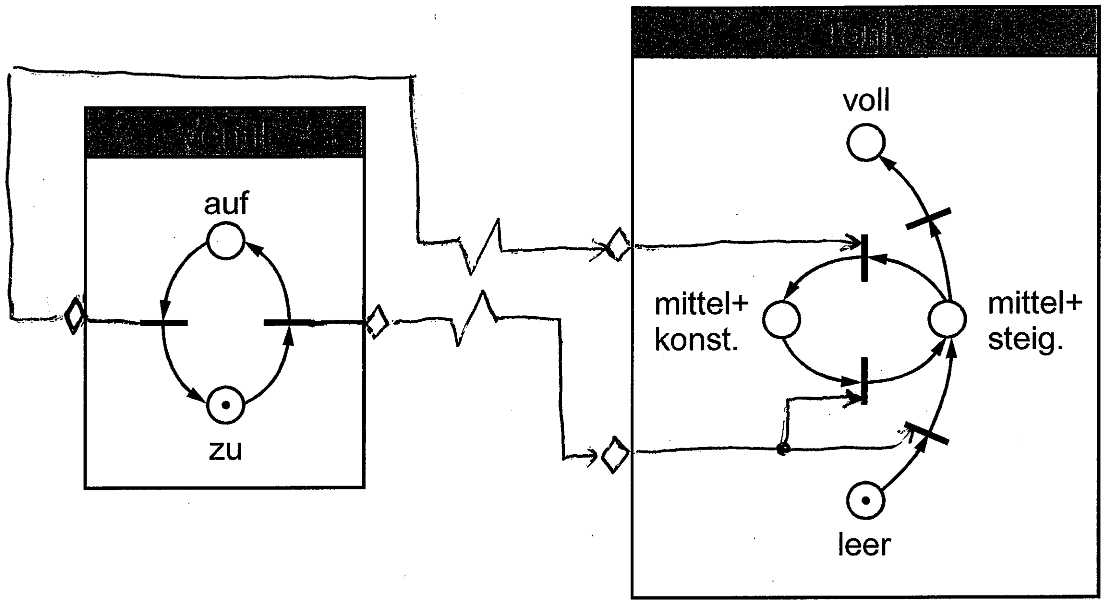
$$\underline{n}_c^T = -[0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1\,1\,0\,-1\,1\,0]$$

$$m_c(0) = 1 - \underline{\ell}^T \underline{m}(0) = 1 - [0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 0 = 1$$



4 Aufgabe

4a)



4b) • $\underline{x}(k+1) = \underline{A}_0\, \underline{x}(k+1) \oplus \underline{A}_1\, \underline{x}(k)$

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}}_{=\underline{A}_0} \underline{x}(k+1) \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}}_{=\underline{A}_1} \underline{x}(k)$$

• $\underline{x}(k+1) = \underline{A}_0^{*}\, \underline{A}_1\, \underline{x}(k)$ mit $\underline{A}_0^{*} = \underline{I} \oplus \underline{A}_0 \oplus \underline{A}_0^{2} \oplus \underline{A}_0^{3}$

$$\underline{A}_0^{2} = \underline{A}_0 \otimes \underline{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad \underline{A}_0^{3} = \underline{A}_0^{2} \otimes \underline{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_0^{*} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_0^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}_0^{*} \otimes \underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Fortsetzung 4b)

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 8 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{bmatrix} \underline{x}(k)$$

- Sie geben die maximale Zeitdauer aller Pfade der Länge 2 an.
- $\lambda = 9$, da λ identisch ist mit dem maximalen Durchschnittsgewicht bzw. der größten konstanten Umlauf aller Zyklen von $G(\underline{A})$

4c)
- $\oplus$: $\varepsilon = -\mathrm{inf}$
- $\otimes$: 0

4d)
- I) $\lambda = 6$ $\quad \gamma = 3$
- II) $\lambda = 6{,}5$ $\quad \gamma = 2$

4e)
- t_4 schaltet dann nach 3 Zeiteinheiten.
- Nein, denn die Transition t_5 schaltet bereits nach 2 Zeiteinheiten